MATHEMATIQUES FINANCIERES

KOBENAN B. MODESTE
0707268168
0504938282
kbmodeste@gmail.com

Ce module introduit les notions de calculs indispensables dans les services financiers et dans les secteurs d'activités économiques et financières. Il permet de comprendre et de maîtriser les opérations relatives aux transactions financières réalisables dans un délai généralement inférieur à un an. La connaissance de la notation somme ($\sum$) ainsi que ses propriétés sont indispensables à la bonne compréhension des formules à établir dans ce module.

Plan

- Les formules de base
- Les intérêts
- Les intérêts simples
- L'escompte
- Les intérêts composés
- Les annuités
- Les emprunts indivis
- Les emprunts obligatoires
- Choix des investissements

Les formules de bases

- Calcul de puissance
- Les suites géométriques
- La fonction logarithmique

Puissance

Calcul de puissance:

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- pour les exposants négatifs: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Puissance d'une puissance:

- $(a^n)^m = \underbrace{a^n \times a^n \times \ldots \times a^n}_{\text{m fois}} = a^{nm}$
- $a^n a^m = a^{n+m}$

Logarithmique

- Soit à résoudre $1.05^n = 7$. Déterminer la valeur de n.
- On utilise le logarithme `népérien` ou logarithme `décimal`.

- Un logarithme se calcule part rapport à une base.
- Les logarithmes népériens (de John Napier dit Neper, mathématicien écossais né au 16éme siècle) ont pour base la valeur e = 2.71828.
- Le logarithme népérien de e est égal à 1.
- $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite geometrique ssi $U_{n+1} = qU_n$. Le `premier terme` est U_0 et la `raison` est q.

- $(U_n)\left\{\begin{array}{l} U_0 \\ U_{n+1} = qU_n \end{array}\right.$

- Le logarithme compte le nombre d'occurrences du même facteur dans une multiplication répétée.
- Par exemple, comme $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$, le logarithme en base 10 de 1000 est 3.

- Le logarithme de x en base b est noté

$$log_b(x) = \frac{ln(x)}{ln(b)}$$

Ainsi: $log_{10}(1000) = 3$

- Pour x strictement positif, on notera $log_{10}(x)$ par $log(x)$

$$log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$$

avec $ln(10) = 2.302585093$.

- **Propriété algébrique**: Pour a et b strictement positifs, $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ et $ln(a^n) = nln(a)$.

- On va utiliser cette dernière formule pour calculer n tel que: $1.05^n = 7$.

- On a: $ln(a^n) = nln(a)$
- $1.05^n = 7 \iff ln(1.05^n) = ln(7) \iff nln(1.05) = ln(7)$
- Soit: $n = \dfrac{ln(7)}{ln(1.05)} = 39,88$

CHAPITRE 1 :
LES INTERETS SIMPLES

I. NOTION D'INTERET

Lorsqu'une personne physique ou morale met à la disposition d'une autre personne une certaine somme d'argent pendant un certain temps, il est convenu que cette somme lui soit remboursée majorée d'un montant appelé intérêt.

Une personne A prête à une personne B une somme d'argent pendant une durée déterminée. Ce service rendu par A (le créancier) à B (le débiteur), cette mise à la disposition de B d'un capital suppose, au bénéfice de A, une rémunération appelée intérêt.

L'intérêt est la rémunération d'un prêt ou d'un placement d'argent appelé le capital.
L'intérêt le loyer de l'argent prêté.

ATTENTION : *Evitons de confondre* ***Intérêt*** *et* ***bénéfice*** *(même si les deux notions font penser à un gain) le bénéfice étant la différence positive entre produits et charges.*

***REMARQUE** : il existe trois grands modes de paiement des intérêts à savoir*

- *les intérêts précomptés : intérêts versés dès la remise du capital*
- *les intérêts post comptés : intérêts versés à la fin du prêt*
- *les intérêts périodiques : intérêts versés à intervalles de temps réguliers*

II. FORMULE DE L'INTERET SIMPLE

1- PRINCIPE :

Une durée de placement peut–être décomposée en plusieurs périodes. Quel que soit la période, le calcul de l'intérêt simple repose sur ***le capital initial*** (que les intérêts périodiques soient payés ou non).

2) NOTATION :

Le montant de l'intérêt dépend évidemment :
C : le capital prêté ou placé ;
t : taux de placement pour 100F de prêt ;
n : la durée de placement ou du prêt ;
I : le montant de l'intérêt du placement.

3) FORMULE :

La de l'intérêt dépend fortement de la durée « n » :

- si la durée « n » est exprimée **en années** alors on a :

$$I= c \times \frac{t}{100} \times n = \frac{c\times t\times n}{100}$$

- si la durée « n » est exprimée **en mois** alors on a :

$$I= c \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{12} = \frac{c\times t\times n}{1200}$$

- si la durée « n » est exprimée **en jours** alors on a :

$$I= c \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360} = \frac{c\times tn}{36000}$$

NB : En considérant une année commerciale de 360 jours.

<u>REMARQUES</u>

- Dans le cas d'une année civile de 365 jours la dernière formule devient

$$I= c \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{365} = \frac{c\times t\times n}{36500}$$

- En l'absence de toute précision, on se réfère pour les calculs de l'intérêt à l'année commerciale de **360 jours**.

D'une manière générale si la durée est exprimée à la fois en années, en mois, en jours (par exemple 1 an 3 mois 25 jours) alors l'intérêt I pourrait être calculé à partir de la formule suivante :

$$I= \frac{c\times t}{100}\left(n_a + \frac{n_m}{12} + \frac{n_j}{360}\right)$$

Avec n_a : la durée exprimée en années

n_m : la durée exprimée en mois

n_j : la durée exprimée en jours.

- Si la période entre deux dates et que la durée doit être exprimée en jours, il faut compter le nombre de jours compris entre les deux dates en prenant en compte l'une des deux dans le décompte(en général on prend en compte la dernière date) ; par exemple du 15 Mars au 10 Juillet, on décompte :

Mars : 31-15= 16 jours
Avril = 30 jours

Mai = 31 jours
Juin = 30 jours
Juillet = 10 jours
Soit un total de 117jours

Remarque : Lorsque la durée de placement est exprimée, par exemple, en jours, on écrira :

$$I = \frac{Ctn}{36\,000}$$

$$C = \frac{36\,000\ I}{tn}$$

$$t = \frac{36\,000\ I}{Cn}$$

$$n = \frac{36\,000\ I}{Ct}$$

<u>REMARQUE</u> :

La durée étant exprimée à la fois en mois et en jours, on pourrait également utiliser la formule : $\mathbf{I}=\frac{\boldsymbol{c\times t}}{\mathbf{100}}\left(\frac{\boldsymbol{n_m}}{\mathbf{12}}+\frac{\boldsymbol{n_j}}{\mathbf{360}}\right)$ et obtenir le même résultat.

III. VALEUR ACQUISE D'UN CAPITAL

Dans le domaine des finances, tout prêt d'argent génère des intérêts. On dit que l'argent prêté se bonifie ou qu'il acquiert de la valeur. La valeur acquise d'un capital est par conséquent ce capital majoré de ses propres intérêts.

Désignons par ***V la valeur acquise*** par un capital C prêté pendant une durée n : **V= C+I**

Pour une durée n exprimée en jours, on a : $\mathbf{V} = \boldsymbol{c} + \frac{\boldsymbol{c\times tn}}{\mathbf{36000}}$

On peut facilement établir les autres expressions de V correspondant à des durées exprimées en mois ou en années.

<u>APPLICATION 1:</u>

En vue de faire face aux besoins financiers liés à la scolarisation de ses enfants, un parent emprunte à sa banque une somme de 900 000F. Le remboursement aura lieu dans 6 mois et il sera majoré des intérêts calculés au taux annuels de 6%.

Déterminons à échéance le montant des intérêts dus puis la somme totale à verser c-à-d la valeur acquise du prêt.

<u>Solution</u> :

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………….

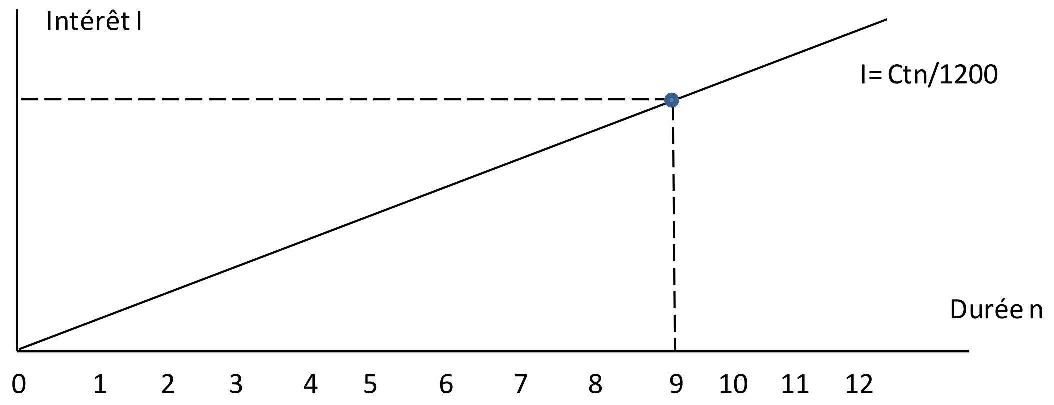
<u>APPLICATION 2:</u>

Un prêt consenti le 13 mars est remboursé le 8 juillet. Quelle a été, en jours, la durée de l'opération durée de l'opération ?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………….

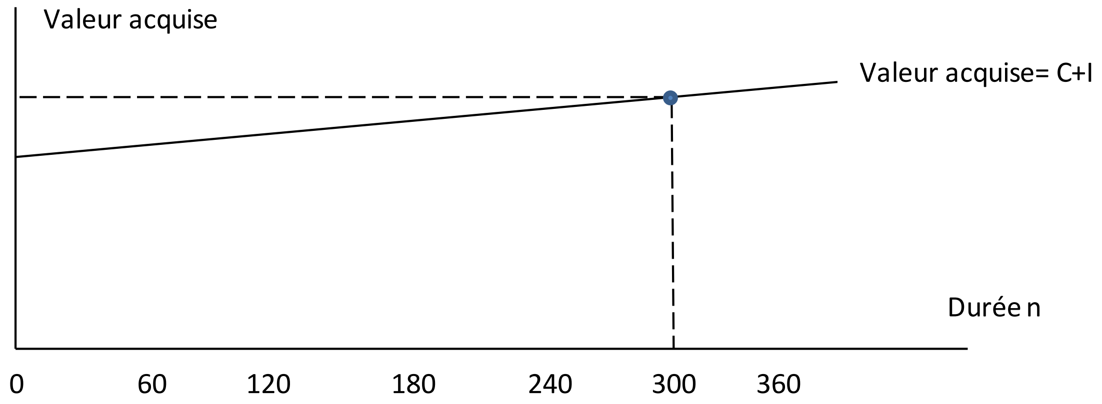
IV. PRESENTATION GRAPHIQUE DU MONTANT DE L'INTERET DU CAPITAL PLACE

L'intérêt produit par un placement est fonction linéaire croissante du capital placé, ainsi que du taux et aussi de la durée de placement, quelle que soit l'unité (année, mois, jour) dans laquelle est exprimée cette durée.



V. REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA VALEUR ACQUISE PAR UN CAPITAL

La valeur acquise par un capital est fonction affine croissante du capital placé, ainsi que du taux, et aussi de la durée de placement.



VI. TAUX MOYEN DE PLACEMENT D'UNE SERIE DE PLACEMENTS EFFECTUES SIMULTANEMENT

Considérons trois capitaux C_1, C_2, C_3 placés à des taux d'intérêt t_1 , t_2, t_3 pendant des durées respectives n_1, n_2, n_3 durées exprimé en jours ; l'intérêt global produit par ses trois capitaux est I tel que

$$\mathbf{I}=\frac{c_1\times t_1\times n_1}{36000}+\frac{c_2\times t_2\times n_2}{36000}+\frac{c_3\times t_3\times n_3}{36000} \qquad (1)$$

On désire trouver le taux unique de placement qui conduirait au même montant d'intérêt ; soit t_m ce taux, on a :

$$\mathbf{I}=\frac{c_1\times t_m\times n_1}{36000}+\frac{c_2\times t_m\times n_2}{36000}+\frac{c_3\times t_m\times n_3}{36000} \qquad (2)$$

Puisque l'intérêt global est le même, on peut déduire des égalités 1 et 2 une nouvelle égalité :

$$\frac{c_1\times t_1\times n_1}{36000}+\frac{c_2\times t_2\times n_2}{36000}+\frac{c_3\times t_3\times n_3}{36000}=\frac{c_1\times t_m\times n_1}{36000}+\frac{c_2\times t_m\times n_2}{36000}+\frac{c_3\times t_m\times n_3}{36000}$$

Remarquons que le résultat de $\boldsymbol{t_m}$ resterait le même si les durées étaient exprimées en mois ou en années ;

Définition et formule

On appelle taux moyen **(t_m)** de placement de plusieurs capitaux C_k (K=1,2,3,…….n) placés respectivement aux taux t_k pendant des durées n_k,le taux unique t_m qu'on pourrait appliquer à chaque capital pour obtenir le même intérêt global.

Formule générale du taux moyen

Il ressort de ce qui précède que $\boldsymbol{t_m=\frac{\sum_{k=1}^{n} c_k\times t_k\times n_k}{\sum_{k=1}^{n} c_k\times n_k}}$

<u>APPLICATION</u>

Déterminons le taux moyen de placement des capitaux ci- après
C1 = 300 000 F ; t1=4,5 ; n1= 9 mois
C2= 550 000F ; t2=5,5 ; n2= 9mois ;
C3=1 250 000 F ; t3=7 ; n3=7 mois ;
C4=800 000 F ; t4 =6 ; n4=4 mois

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

VII. INTERET PRECOMPTE. TAUX EFFECTIF DE PLACEMENT

La notion de taux effectif de placement ressort à chaque fois que le montant total des rémunérations perçues est différent de celui correspondant aux intérêts des capitaux.

1-Définition

C'est le taux T qu'il faut appliquer aux capitaux placés, compte tenu des durées effectives de placement, pour avoir le montant de la rémunération. Cette notion de taux effectif s'observe aussi lorsque l'intérêt est précompté .En effet, selon cette hypothèse l'intérêt que doit verser l'emprunteur est perçu non pas au moment du remboursement, c'est-à-dire à échéance, mais plutôt dès la remise du prêt. Puisque l'intérêt est perçu par avance, on considère que le montant effectivement prêté est le montant initial C diminué de la valeur de l'intérêt I ; soit (C-I). A l'échéance l'emprunteur aura à débourser le montant C.

2- Formule du taux effectif de placement dans l'hypothèse des intérêts Précomptés

Si la durée est exprimée en jours, on a :

$$\mathbf{I}= \frac{(C-I)\times T\times n}{36000} \quad et \quad \mathbf{I} = \frac{C\times t\times n}{36000}$$

On déduit que

$$\mathbf{(C-I)\ \times T\times N=c\times t\times n}$$

$$\textbf{Soit}\ \mathbf{T}= \frac{C\times t}{C-I}$$

Compte tenu de la formule de l'intérêt I on obtient la formule du taux effectif soit

$$\mathbf{T}=\frac{36000\times t}{36000-t\times n}$$

APPLICATION

Déterminons le taux effectif de placement d'un capital de 900 000F prêté à 6,5% pendant 6 mois, les intérêts étant versés par avance.

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

CHAPITRE 2 : L'ESCOMPTE COMMERCIAL

I. NOTION D'ESCOMPTE

A la suite d'une vente à crédit un document commercial est généralement créé. Il fait foi de l'existence d'une créance du fournisseur sur son client.

Le client qui doit est appelé **le débiteur** et le fournisseur auquel on doit est **le créancier.** Le document commercial qui peut être aussi bien **une lettre de change qu'un billet à ordre est un effet de commerce**.

La lettre de change est écrite à l'initiative du créancier qui demande à son débiteur de s'engager par sa signature à payer le montant de sa dette à la date convenue .Par le billet à ordre, le débiteur demande à sa banque, de régler à son créancier, le montant de sa dette. Le montant de la dette à payer est appelé **valeur nominale.**

Le créancier pourrait vouloir disposer de son argent avant la date d'échéance convenue. La possibilité lui est offerte de vendre l'effet ; on dit qu'il négocie l'effet de commerce. Quant à l'acheteur, qui très souvent est un établissement financier, il escompte l'effet. **Négocier** c'est **vendre** un effet et **escompter** c'est **acheter** un effet.

Le banquier escompteur rend service à son client ; ce service est payé au moyen d'intérêt appelé **escompte**. C'est un escompte commercial contrairement à l'escompte financier qui est une réduction accordée à un client qui règle sa facture avant échéance.

II. FORMULE DE L'ESCOMPTE COMMERCIAL

Nous avons mentionné plus haut que l'escompte commercial est l'intérêt que perçoit le banquier pour un service ; on calcule l'escompte comme on aurait calculé l'intérêt.

En désignant par :

- V : la valeur nominale de l'effet de commerce,
- t : taux d'escompte pour 100 F,
- n : la durée restant à courir exprimée généralement en jours,
- e_c : le montant de l'escompte,

On : $$\boldsymbol{e_c = \frac{V \times t \times n}{36000}}$$

APPLICATION

Vous remettez à l'escompte ,24 jours avant sa date d'échéance, un effet de commerce d'une valeur de 540 000 F. Calculer le montant de l'escompte à prélever au taux de 12%.

SOLUTION

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

III. VALEUR ACTUELLE COMMERCIALE D'UN EFFET

C'est la valeur d'un effet le jour de la négociation. Elle correspond à la différence entre la valeur nominale de l'effet et le montant de l'escompte.

Soit A cette valeur ; on a : $\mathbf{A = V - e_c}$ ou $\boldsymbol{A = V - \frac{Vnt}{36000}}$ **ou** $\mathbf{A} = \boldsymbol{\frac{V36000 - tn}{36000}}$

Remarque sur l'escompte commercial:

La formule donnant l'escompte commercial permettra donc d'écrire :

$$e_c = \frac{Vtn}{36000}$$

$$V = \frac{36000e_c}{tn}$$

$$t = \frac{36000e_c}{Vn}$$

$$n = \frac{36000e_c}{Vt}$$

<u>APPLICATION</u>

En reprenant l'application précédente, calculer la valeur actuelle commerciale de l'effet de 540 000 F.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

IV. VALEUR ACTUELLE RATIONNELLE

L'escompte commercial est calculé sur la base de la valeur nominale de l'effet. Cette pratique courante pénalise le client qui gagnerait à ce que l'escompte soit calculé à partir d'une valeur actuelle dite rationnelle.

Si A_r désigne la valeur actuelle rationnelle et e_r l'escompte rationnel, on a la relation

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{A_r + e_r \; avec \;\; e_r = \frac{A_r \times t \times n}{36000}}$$

De l'égalité précédente on déduit l'expression de la valeur actuelle rationnelle :

Soit $\boldsymbol{A_r = \frac{V \times 36000}{36000 + t \times n}}$

<u>APPLICATION</u>

En reprenant l'application précédente de l'escompte commercial on obtient comme valeur actuelle rationnelle

<u>SOLUTION</u>

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

V. L 'AGIO

Ce terme désigne l'ensemble des retenues effectuées par l'escompteur d'un effet de commerce. En plus de l'escompte, la banque prélève des commissions qui serviront à couvrir les charges générées par la transaction : elle prélève aussi des taxes à reverser à l'Etat. On peut résumer ce qui précède en notant :

Agio (hors taxe)= Escompte + Commissions

Agio (taxes comprises) = Escompte + Commissions + Taxes

<u>Remarque</u> :

Les commissions ne sont pas toujours les même d'un établissement financier à un autre. Dans l'ensemble, les commissions sont de diverses natures : elles peuvent être fixes ou variables.

Une commission est fixe lorsque son montant est connu d'avance et est indépendante aussi bien de la valeur nominale que de la durée.

Une commission variable est toujours fonction de la valeur nominale d'un effet et peut être dépendante du temps (commission proportionnelle au temps) ou indépendante du temps (commission indépendante du temps).Ces commissions sont calculées de la façon suivante ;

- commission proportionnelle au temps : $\frac{V \times t \times n}{36000}$ avec t la commission pour 100 F
- commission indépendante du temps : $\frac{V \times t}{100}$ avec t la commission pour 100 F

<u>Remarque</u>

Dans la pratique, un client négocie en même temps plusieurs effets possédant des caractéristiques-valeur nominale, date d'échéance, lieu de paiement-qui leurs sont propres. Ces informations sont consignées dans un document appelé le bordereau d'escompte dont la présentation peut varier d'un établissement financier à un autre. Les taxes prélevées sont essentiellement les taxes liées à l'activité financière ; il s'agit de la T.A.F (taxe sur activité financière) ou de la T.V.A .Lorsque le banquier effectue tous les prélèvements de la valeur nominale, il met à la disposition de son client le reliquat appelé **valeur nette** ou plus simplement le net de la négociation. On a donc comme relation :

Valeur nette = Valeur nominale – agio (taxes comprises)

Ou encore

Valeur nette =Valeur nominale –escompte – commissions – taxes.

VI. NOTION DE TAUX EFFECTIFS

1-Le taux réel d'escompte

C'est le taux qu'il faut appliquer à la valeur nominale pour avoir directement le montant de l'agio, compte tenu du nombre de jours effectifs restant à courir.

Soit t_r ce taux ; on a : $\textbf{Agio} = \frac{V \times t_r \times n_r}{36000}$ **donc** $t_r = \frac{36000 \times Agio}{V \times n_r}$

V = valeur nominale n_r = nombre de jours effectifs

2-Le taux de placement pour le banquier

C'est le taux qu'il faut appliquer à la valeur nette pour avoir le montant de l'escompte, compte tenu du nombre de jours effectifs restant à courir.

Soit t_p ce taux ; on a : $\frac{V_n \times t_p \times n_r}{36000} = e_c$; $t_p = \frac{36000 \times e_c}{V_n \times n_r}$; V_n est la valeur nette.

3-Le taux de revient pour le client

Ce taux évalue le coût de l'opération pour le client ; c'est le taux qu'il faut appliquer à la valeur nette pour obtenir le moment de l'agio, en tenant compte du nombre de jours effectifs à courir.

Soit t'ce taux ; on a : $\frac{V_n \times t' \times n_r}{36000} = Agio$; t'$= \frac{36000 \times agio}{V_n \times n_r}$

APPLICATION

Le 7 Avril Mme AHO achète pour 3 000 000 F de marchandises à son fournisseur M. SYLLA. Elle paie immédiatement les 2/5 de la somme et s'engage par écrit à régler le solde 90 jours plus tard c'est-à-dire le 6 juillet. Le 6 juin M.SYLLA négocie, aux conditions suivantes, l'effet de commerce créé :

-taux de l'escompte : 12%
-commission fixe : 1 000 F
-taux de la commission d'endos : 1,2%
-Commission de service : 1‰ de la valeur nominale
-T.V.A 10% de la commission de service
- 2 jours de banque

Travail à faire

1- Déterminer dans ces conditions la somme à remettre à M. SYLLA.
2-Déterminer les taux réel d'escompte t_r , de placement t_p et de revient t'

SOLUTION

CHAPITRE 3 : EQUIVALENCE DE CAPITAUX A INTERETS SIMPLES

Rappelons que parmi les éléments qui caractérisent un effet de commerce figure la valeur nominale et la date d'échéance. La modification de l'un de ces deux éléments engendre aussitôt une modification de l'autre. Nous apprendrons dans cette partie à renouveler un effet ou un groupe d'effets sans créer de préjudice ni au prêteur ni à l'emprunteur.

I. EQUIVALENCE DE DEUX EFFETS OU DE DEUX CAPITAUX

Deux effets de valeurs nominales et d'échéances différentes sont dits équivalents à une date donnée si, escomptés à cette date et dans les mêmes conditions, ils ont la même valeur actuelle.

<u>APPLICATION</u>

Considérons deux effets de valeurs nominales 900 000 F et 910 715 F échéant dans 25 et 60 jours respectivement. Etudions leur équivalence au taux d'escompte de 12%.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

II. EQUIVALENCE ENTRE UN EFFET ET UN GROUPE D'EFFETS

Un effet est équivalent à un groupe d'effets d'échéances différentes, à une date donnée si, escomptée à cette date aux mêmes conditions, la valeur actuelle de cet effet est égale à la somme des valeurs actuelles des effets du groupe.

APPLICATION

Considérons un effet de commerce de valeur nominale 1 202 974 F échéant dans 100 jours et un groupe de trois effets de valeurs nominales 200 000 F, 600 000F et 400 000F échéant respectivement dans 55, 85 et 116 jours. Vérifions, au taux d'escompte de 9%, l'équivalence entre l'effet unique et le groupe des trois effets.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

III. EQUIVALENCE ENTRE DEUX GROUPES D'EFFETS

Deux groupes d'effets d'échéances différentes sont équivalents à une date donnée si, escomptés à cette date dans les mêmes conditions, la somme des valeurs actuelles d'un groupe est égale à la somme des valeurs actuelles de l'autre.

APPLICATION

Mme YAO commerçante au grand marché désire faire remplacer trois effets de valeurs nominales 1 440 000F ; 2 160 000F et 1 920 000F échéant respectivement dans 28, 39 et 54 jours, par deux effets de valeurs nominales 2 400 000F et 3 153 000F échéant respectivement dans 45 et 80 jours. Vérifions au taux d'escompte de 9%, l'équivalence entre les deux groupes d'effets.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

REMARQUE

A intérêt simple, la date d'équivalence est unique ce qui signifie que des effets équivalents à une date donnée ne le sont ni avant ni après cette date. Néanmoins l'échéance moyenne constitue une particularité qui sera étudiée par la suite.

IV. ECHEANCE COMMUNE

On désigne par échéance commune la date d'échéance d'un effet unique de valeur nominale connue et qui est équivalent à un groupe d'effets.

APPLICATION

Le 10 juin M.KOFFI veut faire remplacer une dette matérialisée par trois effets de valeurs nominales 600 000F, 900 000F et 1 200 000F échéant respectivement dans 30, 36 et 45 jours, par un effet unique de valeur nominale 2 701 215F. Déterminer l'échéance de cet effet de remplacement au taux d'escompte de 12%.

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Remarque 1

Lorsque la valeur nominale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets du groupe alors l'échéance commune est appelée **échéance moyenne**. On démontre dans ce cas que cette échéance est indépendante du taux d'escompte et de la date d'équivalence choisis.

Illustration 1

On remplace trois effets de commerce de valeurs nominales 600 000F, 1 050 000F et 1 350 000F échéant respectivement le 30 mai, le 29 juin et le 8 août par un effet de valeur nominale 3 000 000F. Déterminons la date d'échéance de cet effet.

Résolution

Remarquons que dans cet énoncé ni la date de négociation, ni le taux de l'escompte n'ont été donnés, la résolution du problème est pourtant possible car on peut aussi constater que la valeur nominale de l'effet unique est la somme des valeurs nominales des effets à remplacer.

Désignons par V_1, V_2 *et* V_3 *les valeurs nominales des effets existants. Prenons de façon arbitraire une date de négociation qui sera la date d'équivalence ; soit par exemple le 10 mai. Désignons par* n_1, n_2 *et* n_3 *les durées respectives séparant les échéances de la date d'équivalence. La relation d'équivalence entre l'effet de remplacement et les effets à remplacer est la suivante :*

$$\boldsymbol{V - \frac{V \times t \times n}{36000} = V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} + V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000} + V_3 - \frac{V_3 \times t \times n_3}{36000}}$$

On a constaté que la valeur de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets à remplacer ; soit V= $V_1 + V_2 + V_3$ *. Il s'agit donc d'un cas d'échéance moyenne. Les termes V d'une part et* V_1, V_2, V_3 *d'autre part s'éliminent dans l'égalité précédente ; de plus en effectuant les simplifications par t puis par 36000, l'égalité devient :*

$$\boldsymbol{V \times n = V_1 \times n_1 + V_2 \times n_2 + V_3 \times n_3 \quad soit\ V \times n = \sum_{i=1}^{3} V_i \times n_i}$$

Remarque :

Le taux d'escompte ayant disparu après les simplifications, il n'était donc pas indispensable d'en connaitre la valeur. La durée n séparant l'échéance de la date d'équivalence n est donc :

$$\boxed{\mathbf{n} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{V_i \times n_i}}{\boldsymbol{V}}}$$

Compte tenu de la date du 10 mai choisie comme date d'équivalence, on a : $n_1 = 20\,jours$; $n_2 = 50\,jours$; $n_3 = 90\,jours$; en portant ces valeurs dans l'expression de n, on obtient n = 62 jours.

L'échéance de l'effet de remplacement est fixée à 62 jours du 10 mai soit le 11 juillet. En prenant plutôt le 30 mai comme date d'équivalence,

on a $n_1 = 0\, jour, n_2 = 30\, jours\ et\ n_3 = 70\, jours$; en portant ces valeurs dans l'expression de n, on obtient n = 42 jours.

L'échéance de l'effet de remplacement est fixée à 42 jours du 30 mai soit le 11 juillet. La date d'échéance est restée la même bien qu'on ait changé de date d'équivalence.

Remarque :

Dans le cas de l'échéance moyenne la date d'échéance de l'effet de remplacement ne dépend pas de la date d'équivalence choisie.

CHAPITRE 4 :
LES INTERETS COMPOSES

Les opérations financières à long terme concernant les opérations réalisables sur une durée généralement supérieure à l'année. Cette durée est décomposée **en intervalles de temps égaux appelés périodes.** La période peut être le mois, le trimestre, le semestre, l'année…..etc.

I. DEFINITIONS

1- Intérêt composé

Un placement ou un prêt est effectué à intérêts composés si, à la fin de chaque période, la valeur acquise à intérêts simples sert de base de calcul de l'intérêt pour la période suivante et ce processus continue jusqu'à la fin de la durée de l'opération.

2- Capitalisation

La capitalisation est la transformation successive des intérêts en capital. C'est le processus par lequel on intègre régulièrement l'intérêt au capital initial.

II. FORMULES ESSENTIELLES

1- valeur acquise à intérêts composés : formule de capitalisation

Désignons par :
C $le\ montant\ du\ capital\ placé\ ou\ prêté$;
n le nombre (entier ou non) de périodes ;
i le taux d'intérêt pour 1 F et pour une période ;
C_n le montant de la valeur acquise au bout de n périodes.

Périodes	Capital en début de période	Intérêt en fin de période	Valeur acquise en fin de période
1	C	C$\times i \times 1$	$C_1 = C + C \times i = \boldsymbol{C(1+i)}$
2	C_1	$C_1 \times i \times 1$	$C_2 = C_1(1+i) = \boldsymbol{C(1+i)^2}$
3	C_2	$C_2 \times i \times 1$	$C_3 = C_2(1+i) = \boldsymbol{C(1+i)^3}$

Par itérations on aboutit à la formule générale **:** $\boldsymbol{C_n = C(1+i)^n}$

APPLICATION

Yasmine a fait un dépôt à terme d'un montant de 2 000 000 F à intérêts composés pour une durée de 3 ans. Le taux d'intérêt annuel étant de 6%, déterminer la valeur acquise par ce dépôt.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

APPLICATION

Dans l'application précédente considérons une durée de placement de 3 ans et 8 mois puis déterminons la valeur acquise par ce dépôt.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Remarque

Il existe d'autres procédés théoriques de calcul de la valeur acquise pour un nombre non entier de périodes ; par exemple le calcul de la valeur acquise rationnelle.
Dans ce cas, on calcule la valeur acquise à intérêts composés au bout du nombre entier de périodes (ici 3 ans) puis cette valeur acquise est placée à intérêts simples pour la durée restante de période (ici 8 mois).

2- Calcul du montant de l'intérêt.

Soit I le montant de l'intérêt généré par le capital C après n périodes de placement ; C_n étant la valeur acquise par ce capital on a :

C_n =C+ I donc I =$C_n - C$

3- Valeur actuelle à intérêts composés : actualisation

L'actualisation est l'opération inverse de la capitalisation ; elle conduit à la détermination de la valeur actuelle d'un capital .Il s'agit de déterminer le capital C à placer à intérêts composés afin d'avoir une valeur $C_n$donnée au bout de n périodes. Ainsi de la relation donnant la valeur acquise on déduit celle qui permet d'avoir le capital C ; soit **C= $C_n(1+i)^{-n}$**

Remarque
Les deux opérations de capitalisation et d'actualisation peuvent être schématisées de la façon suivante :

$$C_n = C(1+i)^n \text{ Capitalisation}$$

$$C = C_n(1+i)^{-n} \quad \text{Actualisation}$$

<u>APPLICATION</u>

Quelle somme faut-il placer aujourd'hui au taux annuel de 6% afin d'obtenir une somme de 3 000 000 F au bout de cinq ans ?

SOLUTION
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

4- Escompte à intérêts composés

Lorsque l'échéance d'un effet est supérieure à l'année, il est conseillé d'effectuer le calcul de l'escompte à intérêts composés. Soit :
V la valeur nominale d'un effet de commerce ;
A sa valeur actuelle ;
E_c le montant de l'escompte commercial.

On a : $\mathbf{A = V\,(1+\boldsymbol{i})^{-n}}$

Et on déduit l'escompte

$\boldsymbol{E_C}$ **=V- A=** $\boldsymbol{V}[\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}]$

APPLICATION
Un effet de valeur nominale 12 000 000 F échéant dans 5 ans est escompté à intérêts composés au taux annuel de 8,5% ;
Calculer le montant de l'escompte.

<u>SOLUTION</u>

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

III. Taux équivalents - Taux proportionnels

1- Taux équivalents

Deux taux portant sur des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents si, pour un même capital donné et pour une même durée de placement, ils conduisent à la même valeur acquise à intérêts composés.

Soit :
C le capital placé pendant un an ;
i_a le taux annuel pour 1 F ;
i_s le taux semestriel pour 1 F ;
i_t le taux trimestriel pour 1 F ;
i_m le taux mensuel pour 1 F

Dire que ces taux sont équivalents revient à écrire les égalités suivantes :

$$\mathbf{C\,(1+\boldsymbol{i_a}) = C(1+\boldsymbol{i_s})^2 = \boldsymbol{C}(1+\boldsymbol{i_t})^4 = \boldsymbol{C}(1+\boldsymbol{i_m})^{12}}$$

On déduit la relation : $\mathbf{(1+\boldsymbol{i_a}) = (1+\boldsymbol{i_s})^2 = (1+\boldsymbol{i_t})^4 = (1+\boldsymbol{i_m})^{12}}$

APPLICATION

Calculer les taux trimestriel, semestriel et mensuel équivalent à un taux annuel de 17,5% .

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2- Taux proportionnels

Deux taux portant sur des périodes de capitalisation différentes sont dits proportionnels si leur rapport est égal au rapport des périodes de capitalisation correspondantes.

$$\frac{i_a}{i_s} = \frac{12}{6} \quad ; \quad \frac{i_a}{i_t} = \frac{12}{3} \quad ; \quad \frac{i_a}{i_m} = \frac{12}{1}$$

$$i_a = 2i_s \quad ; \quad i_a = 4i_t \quad ; \quad i_a = 12i_m$$

APPLICATION

Etant donné un taux annuel de 18%, calculer les taux mensuel, trimestriel et semestriel proportionnels.

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Remarque

A la suite d'un calcul de taux, il est recommandé de retenir cinq chiffres après la virgule, ce qui correspond à trois chiffres après la virgule lorsque le taux est exprimé en pourcentage.

IV. EQUIVALENCE A INTERETS COMPOSES

Nous avons défini et étudié l'équivalence des effets (ou de capitaux) à intérêts simples. Cette notion d'équivalence peut aussi être appliquée à intérêts composés pour les opérations financières à long terme.

1- Equivalence de deux effets ou capitaux

Deux capitaux de valeurs nominales C_1 et C_2 échéant respectivement dans $n_1$et n_2 périodes sont dits équivalents à la date 0 et à un taux périodique i si leurs valeurs actuelles à cette date sont égales. L'égalité suivante traduit l'équivalence des capitaux C_1 et C_2 à la date 0 ; soit

$$\boldsymbol{C_1(1+i)^{-n_1} = C_2(1+i)^{-n_2}}$$

<u>APPLICATION</u>

Soient les capitaux suivants :
C_1=2 382 032 000 F payable dans 3 ans et C_2 = 2 676 451 155 F payable dans 5 ans. Etudions leur équivalence au taux annuel de 6%.

SOLUTION

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

<u>Remarque</u> <u>1</u>
A intérêts composés, si l'équivalence de deux capitaux est établie à une date donnée alors elle se conserve à n'importe quelle autre date.

<u>Remarque</u> <u>2</u>
Tout comme à intérêts simples, on peut définir à intérêts composés l'équivalence d'un effet à un groupe d'effets et l'équivalence de deux groupes d'effets.

CHAPITRE 5 : LES ANNUITES

Ce chapitre est une application des règles de calcul des intérêts composés pour les placements ou les décaissements de plusieurs sommes de même montant ou de montant différents lorsqu'ils sont effectués à intervalle de temps égaux.

I. GENERALITES

On désigne par annuités des sommes versées à intervalle de temps égaux ; cet intervalle de temps est appelé la **période**. Celle-ci peut correspondre aussi bien à l'année qu'au semestre, au trimestre ou au mois. Le terme annuité est générique ; il peut être remplacé par **semestrialité** si la période est le semestre, **trimestrialité** si la période est le trimestre et **mensualité** si la période est le mois.

Les annuités versées visent deux objectifs :

- la constitution d'un capital (il s'agit d'annuités de capitalisation)
- le remboursement d'une dette (ce sont des annuités de remboursement).

Lorsqu'elles sont de même montant les annuités sont dites constantes ; dans le cas contraire, elles sont dites variables.

Selon le nombre de versements, les annuités sont dites **temporaires, perpétuelles ou viagère.** Les annuités sont temporaires lorsque le nombre de termes est connu ; elles sont perpétuelles si le nombre de termes est infini et viagères si leur nombre dépend de la durée de vie d'une ou de plusieurs personnes.

II. EVALUATION D'UNE SUITE DE *N* ANNUITES

On désigne par i le taux périodique pour 1 F, n le nombre d'annuités.

Quelques définitions : annuités immédiates, différées ou anticipées

-lorsqu'on se place, pour évaluer une suite d'annuités, une période avant le premier versement, la suite d'annuités est dite **immédiate.** On a exactement **une période** entre la date de versement de la première annuité a_1 et la date de référence notée 0.

-la suite d'annuités est dite **différée** si la date d'évaluation se situe à plus d'une période de celle du premier versement .On a **plus d'une période** entre la date de versement de la première annuité a_1 et la date de référence notée 0.

-la suite d'annuités est dite anticipée si la date d'évaluation se situe à moins d'une période de la date du premier versement. On a moins d'une période entre la date de versement de la première annuité a_1 et la date de référence notée 0.

1- Les annuités variables *

a. Evaluation à la date du dernier versement

On désigne par V la valeur de ces n annuités, immédiatement après le dernier versement. Alors V est la somme des valeurs acquises de ces annuités.

On suppose n =5 et on note a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, les cinq annuités versées .En appliquant les règles de capitalisation à intérêts composés à chacune des annuités versées, on obtient la relation :

$$V = a_1(1+i)^4 + a_2(1+i)^3 + a_3(1+i)^2 + a_4(1+i) + a_5$$

Remarque :

La relation établie précédemment reste la même si les dates de versements des cinq annuités étaient plutôt 0, 1, 2, 3 et 4.
Plus généralement, pour n versements, la relation précédente devient :

$$V = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \ldots\ a_k(1+i)^{n-k} + \ldots + a_{n-1}(1+i) + a_n \quad \text{(Relation 1)}$$

APPLICATION

Evaluer, au taux annuel de 5% et immédiatement après le dernier versement, la valeur des 6 annuités respectives suivantes :350 000 F ,650 000 F, 500 000 F, 490 000 F, 600 000 F et 835 000 F.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

b. Evaluation une période avant le premier versement

On désigne par A la valeur de ces n annuités une période avant le premier versement. Alors A est la somme des valeurs actuelles de ces annuités .On suppose que n = 5 et on note a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 les cinq annuités versées. En appliquant les règles d'actualisation à intérêts composés à chaque annuité versée, on obtient la relation :

$$A = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + a_3(1+i)^{-3} + a_4(1+i)^{-4} + a_5(1+i)^{-5}$$

Plus généralement, pour n versements, la relation précédente devient :

$$A = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \ldots + a_k(1+i)^{-k} + \ldots + a_n(1+i)^{-n} \quad \text{(Relation 2)}$$

APPLICATION

Les 6 versements de l'illustration 1 sont effectués en vue de régler une dette contractée un an avant le premier versement. Déterminer le montant emprunté.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

2- Les annuités constantes

Ce type d'annuités est souvent observé dans la vie courante par exemple lors du règlement d'une dette ou dans le cas de prélèvements en vue de constituer un capital. Soit a l'annuité constante.

a. Evaluation à la date du dernier versement

En nous référant aux annuités variables précédentes il suffit de remplacer les sommes a_k par l'annuité constante a. La valeur de la suite d'annuités à la date du dernier versement devient :

$$\mathbf{V}= \boldsymbol{a}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}+\boldsymbol{a}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-\mathbf{2}}+\cdots+\boldsymbol{a}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}+\cdots+\boldsymbol{a}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})+\boldsymbol{a}$$

L'addition étant commutative cette somme peut être faite de la droite vers la gauche. V est donc la somme des n termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison (1+i).

$$\mathbf{V}= \boldsymbol{a}\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}}$$

APPLICATION

Afin de constituer un capital, CASSANDRA décide d'effectuer 15 versements annuels de 1 250 000 F chacun. De quelle somme disposera-t-elle immédiatement après le dernier versement ? Taux annuel d'intérêt 4,5%.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

b. Evaluation une période avant le premier versement

En utilisant la relation 2 obtenue précédemment, il suffit de remplacer les annuités a_k par l'annuité constante a. La valeur de la suite d'annuités devient :

A= $a(1+i)^{-1}+a(1+i)^{-2}+a(1+i)^{-3}+\cdots+a(1+i)^{-n}$ (Relation 3)

A est la somme des termes d'une géométrique de premier terme $a(1+i)^{-1}$ et de raison$(1+i)^{-1}$.

$$A= a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Remarque : n périodes séparent la date du dernier versement de celle retenue dans cette hypothèse. Aussi peut-on obtenir la valeur A par simple actualisation de V sur les n périodes :

$$A= V(1+i)^{-n}=a\frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)^{-n}=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

APPLICATION

Pour rembourser une dette, RAPHAEL doit effectuer 20 remboursements trimestriels de 500 000F chacun, le premier versement étant prévu un trimestre après la date de l'emprunt. Calculer au taux trimestriel de 4% le montant de la somme empruntée.

SOLUTION

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

3. Annuités variables

Ici on considère les annuités qui évoluent soit en progression arithmétique soit en progression géométrique.

3-1) Annuités variant en progression arithmétique

Soit a_1 la première annuité, r la raison de la progression arithmétique, i l'intérêt périodique pour 1F et n le nombre d'annuités versées ou à verser.

a. Evaluation à la date du dernier versement

Soit V la valeur de la suite d'annuités à la date du dernier versement.

$$\mathbf{V}= \left(a_1 + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$$

APPLICATION

Calculer à la date du dernier versement la valeur de cinq annuités variant en progression arithmétique dont la première annuité vaut 250 000F et la raison 50 000F. Taux annuel d'intérêt 6%.

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Remarque : Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant la formule donnant la valeur d'une suite d'annuités quelconques à la date du dernier versement :

$V = 250\ 000(1{,}06)^4 + 300\ 000(1{,}06)^3 + 350\ 000(1{,}06)^2 + 400\ 000(1{,}06) + 450\ 000 = 1\ 940\ 184{,}04F$

b. Evaluation une période avant le premier versement

Soit A la valeur de la suite d'annuités une période avant le premier versement :

$$\mathbf{A}= \left(a_1 + \frac{r}{i} + nr\right)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}$$

APPLICATION

Reprendre l'application précédent puis déterminer la valeur des 5 annuités une période avant le premier versement.

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3-2) Annuités variant en progression géométrique
Soit a_1 la première annuité, q la raison de la progression géométrique, i l'intérêt périodique pour 1F et n le nombre d'annuités versées ou à verser.

a. Evaluation à la date du dernier versement
La valeur de la suite d'annuités à la date du dernier versement est donnée par la formule :

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{a_1} \frac{\boldsymbol{q^n - (1+i)^n}}{\boldsymbol{q - (1+i)}} \quad \textbf{ou encore} \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{a_1} \frac{\boldsymbol{(1+i)^n - q^n}}{\boldsymbol{(1+i) - q}} \quad \textbf{avec } \mathbf{q} \neq \boldsymbol{(1+i)}$$

$$\textbf{Si q} = \boldsymbol{(1+i)} \ \boldsymbol{alors} \ \boldsymbol{V = n \times a_1 (1+i)^{n-1}}$$

APPLICATION
Déterminer, à la date du dernier versement, la valeur de 8 versements annuels variant en progression géométrique de raison 1,02 et ayant pour premier terme 200 000F. Taux annuel 10%.

SOLUTION
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

a. Evaluation une période avant le premier versement

Elle se déduit par actualisation, sur n périodes, de la valeur de la suite d'annuités à la date du dernier versement.

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{V(1+i)^{-n}} = \boldsymbol{a_1} \frac{\boldsymbol{1 - q^n (1+i)^{-n}}}{\boldsymbol{(1+i) - q}}$$

4. **Evaluation d'une suite d'annuités à une date quelconque**

Il s'agit de déterminer, à une date donnée, le montant équivalent aux n annuités versées ou à verser. Dans ce qui précède nous avons été amené à évaluer une suite d'annuités soit à la date du dernier versement soit une période avant le premier versement. Les formules donnant la valeur acquise V et la valeur actuelle A serviront de formules de base pour évaluer une suite d'annuités à une date quelconque.

4-1) Evaluation à une date postérieure à celle du dernier versement

Soit k le nombre de périodes qui séparent les deux dates ; la valeur de la suite d'annuités à cette date s'obtient par capitalisation de V sur k périodes ou celle de A sur (n+k) périodes. Soit V' la valeur de la suite d'annuités k périodes après le dernier versement.

V'$= V(1+i)^k = A(1+i)^{n+k}$

<u>APPLICATION</u>

Déterminer la valeur de 12 mensualités de 120 000 F chacune quatre mois après le dernier versement ; taux mensuel 0,3%.

<u>SOLUTION</u>

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

4-2) Evaluation à une date antérieure à celle du dernier versement

Soit k' le nombre de périodes séparant la date du dernier versement de celle de l'évaluation ; la valeur de la suite d'annuités est donnée par actualisation de V sur k' périodes ou par capitalisation (ou actualisation) de A sur (n-k') périodes.
Soit V'' la valeur de la suite à la date indiquée :

V''$= V(1+i)^{-k'} = A(1+i)^{n-k'}$

CHAPITRE 6 :
LES EMPRUNTS INDIVIS

I. GENERALITES

Lorsqu'une personne physique ou morale désire acquérir un bien ou financer un investissement, elle peut être amenée à contracter un emprunt d'un établissement financier.

1) Définition

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire contracté auprès d'un seul prêteur.

2) Principe de remboursement

Dans le monde des affaires il est convenu que tout prêt s'accompagne du remboursement du capital et du paiement des intérêts induits. Le principe de remboursement est fondé sur l'équivalence à intérêts composés des sommes reçues et celles décaissées.

3) Types de remboursement

Selon les clauses du contrat le capital emprunté peut être remboursé de façon progressive ou en une seule fois.

II. Remboursement progressif du capital

L'emprunt est remboursé à l'aide d'annuités constantes ou variables qui comportent chacune une fraction du capital emprunté. Cette fraction du capital est appelée amortissement.

1) Etude d'un tableau d'amortissement concret

a) Exemple :
M. Kobenan reçoit de son banquier le tableau d'amortissement du prêt d'une valeur de 2 400 000F contracté en début d'année au taux annuel de 16% et remboursable en 5 ans à l'aide d'annuités versées en fin d'année.

Période	Dette en début de période	Amortissement de la période	Intérêt de la période	Annuité	Dette en fin de période
1	2 400 000	400 000	384 000	784 000	2 000 000
2	2 000 000	400 000	320 000	720 000	1 600 000
3	1 600 000	480 000	256 000	736 000	1 120 000
4	1 120 000	520 000	179 200	699 200	600 000
5	600 000	600 000	96 000	696 000	0

b) Lecture et analyse du tableau

Le tableau d'amortissement présente le plan de règlement d'un emprunt contracté auprès d'une personne physique ou morale. On y retrouve les éléments suivants :

- **Période** : c'est l'intervalle de temps qui sépare deux échéances consécutives, le nombre qui indique la période renseigne sur l'échéance à laquelle on se situe.
- **Dette en début de période** : c'est le montant encore dû par l'emprunteur à une époque donnée
- **Amortissement de la période** : c'est la fraction du capital emprunté qui doit être remboursée à une échéance donnée
- **Intérêt** : il désigne la charge financière liée à la dette encore vivante en début de période
- **Annuité** : c'est le montant total à débourser à une échéance pour assurer le service de la dette. Elle comporte essentiellement l'amortissement et l'intérêt de la période
- **Dette en fin de période** : c'est le montant de la dette à une époque donnée, juste après le versement de l'annuité de la période.

Analysons la 3e ligne du tableau :

- la dette en début de période d'une valeur de 1 600 000F correspond aussi à la dette en fin de période précédente (période 2)
- l'intérêt d'un montant de 256 000F est le produit par i (soit 0,16) de la dette de début de période
- l'annuité de 736 000F représente la somme des intérêts et de l'amortissement de la période
- la dette à la fin de la 3e période est la différence entre la dette en début de période et l'amortissement de la période

2. Généralisation

Soient $\boldsymbol{i}$ l'intérêt périodique pour 1F ;
$\boldsymbol{D_0}$ Le capital emprunté ou la dette initiale ;
$\boldsymbol{n}$ le nombre d'annuités de remboursement ;
$\boldsymbol{a_k}$ L'annuité versée à la fin de la période k ;
$\boldsymbol{m_k}$ L'amortissement contenu dans l'annuité a_k ;
$\boldsymbol{I_k}$ L'intérêt contenu dans l'annuité a_k ;
$\boldsymbol{D_k}$ Le capital restant dû après le versement de l'amortissement de rang k.

a) Tableau général

Période	**Dette en début de période**	**Intérêt**	**Amortissement**	**Annuité**	**Dette en fin de période**
1	D_0	$D_0 \times i$	m_1	a_1	$D_1 = D_0 - m_1$
2	D_1	$D_1 \times i$	m_2	a_2	$D_2 = D_1 - m_2$
3	D_2	$D_2 \times i$	m_3	a_3	$D_3 = D_2 - m_3$
……	………	………...	………...	………….	…………
K	D_{k-1}	$D_{k-1} \times i$	m_k	a_k	$D_k = D_{k-1} - m_k$
K+1	D_k	$D_k \times i$	m_{k+1}	a_{k+1}	$D_{k+1} = D_k - m_{k+1}$
…...	……….	…………..	…………..	…………	…………
……...	…….	……...	……….	………...	…………...
n-1	D_{n-2}	$D_{n-2} \times i$	m_{n-1}	a_{n-1}	$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$
N	D_{n-1}	$D_{n-1} \times i$	m_n	a_n	$D_n = 0$

b) Relations

A partir de ce tableau général d'amortissement, on vérifie les propriétés suivantes :

- **Relation liant dettes et amortissements**

$$D_0 = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n = \sum m_k \quad (Relation\ 1)$$

$$D_n = D_{n-1} - m_n \ ; \ D_n = 0 \quad donc\ D_{n-1} = m_n\ (Relation\ 2)$$

- **Relation liant dette initiale et annuités**

Selon le principe de l'équivalence on a

$D_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \cdots + a_k(1+i)^{-k} + \cdots a_n(1+i)^{-n} = \sum a_k(1+i)^{-k}$ $(Relation\ 3)$

- **Relation liant annuités et amortissements**

$$a_n = m_n + D_{n-1} \times i \quad or \quad D_{n-1} = m_n \quad donc \quad a_n = m_n + m_n \times i$$

Soit $a_n = m_n(1+i)$ $(Relation\ 4)$

$$a_k = m_k + D_{k-1} \times i$$

$$a_{k+1} = m_{k+1} + D_k \times i$$

$$a_{k+1} - a_k = (m_{k+1} + D_k \times i) - (m_k + D_{k-1} \times i) = m_{k+1} - m_k(1+i)\ (Relation\ 5)$$

Evaluation de la dette vivante à une date k

Soit R_k *le capital amorti après le paiement de l'annuité* a_k

$$R_k = m_1 + m_2 + m_3 + .. + m_k = \sum m_p \quad (Relation\ 6)$$

Soit D_k *la dette vivante à la date k*

$D_k = D_0 - R_k$ (Relation 7)

Cette dette peut être obtenue par actualisation des annuités non échues ;

Soit $D_k = a_{k+1}(1+i)^{-1} + a_{k+2}(1+i)^{-2} + \cdots + a_n(1+i)^{-(n-k)}$ $(Relation\ 8)$

On peut donc établir l'équivalence à la date k entre la somme empruntée et les annuités versées.

$$D_k = D_0(1+i)^k - (a_1(1+i)^{k-1} + a_2(1+i)^{k-2} + \cdots + a_k) \quad (Relation\ 9)$$

3. Cas particuliers

a. Annuités constantes

Selon cette hypothèse les relations précédentes deviennent

Relation 3 $\quad D_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ (Relation 3 bis)

Relation 8 $\quad D_k = a\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$ $(Relation\ 8\ bis)$

Relation 9 $\quad D_k = D_0(1+i)^k - a\frac{(1+i)^k-1}{i}$ (Relation 9 bis)

Relation 5 $\quad m_{k+1} - m_k(1+i) = 0$ $(Relation\ 5\ bis)$

De cette relation, on déduit $m_{k+1} = m_k(1+i)$. Cela conduit à la loi de variation des amortissements.

<u>Théorème</u>
Lorsque les annuités sont constantes, les amortissements successifs varient en progression géométrique croissante de raison (1+i).

<u>Remarque</u>
Ceci constitue la loi de variation des amortissements lorsque les annuités sont constantes.

<u>Conséquences</u>

Relation 1 $D_0 = m_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ $(Relation\ 1\ bis)$

On tire la valeur du premier amortissement $m_1 = \frac{D_0 \times i}{(1+i)^n - 1}$

Relation 6 $R_k = m_1 \frac{(1+i)^k - 1}{i}$ (Relation 6 bis)

Relation 7 $D_k = D_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}$ (Relation 7 bis)

<u>APPLICATION</u>

En vue de rembourser un prêt contracté au taux annuel de 20%, Mme TABI doit verser 10 annuités de 2 500 000F chacune, la première étant versée un an après la remise des fonds.
Déterminer :
1) La somme empruntée
2) Le montant de l'amortissement contenu dans la première annuité
3) La somme totale remboursée après le 5e versement
4) Le capital restant dû après le paiement de la 5e annuité

<u>SOLUTION</u>

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Théorème

Lorsque les amortissements sont constants, les annuités successives varient en progression arithmétique décroissante de raison $\frac{-D_0 \times i}{n}$

Remarque : Ceci constitue la loi de variation des annuités lorsque les amortissements sont constants.

III. REMBOURSEMENT EN BLOC

De plus en plus on rencontre de façon pratique ce type de remboursement aussi appelé remboursement in fine.

Principe

Le remboursement in fine peut se faire selon deux modes particuliers :

Mode 1

A l'échéance, l'emprunteur rembourse le capital et paie également les intérêts composés. La somme totale payée représente la valeur acquise à intérêts composés du capital emprunté.

Mode 2

L'emprunteur paie les intérêts périodiques du capital emprunté. A l'échéance, il paie le dernier intérêt et rembourse le capital.

Quel que soit le mode retenu, l'emprunteur peut constituer un fonds d'amortissement en vue d'honorer ses engagements. Il place à cet effet périodiquement et à intérêts composés des sommes qui lui permettront d'obtenir le montant du capital emprunté.

Remarque

En général, le taux de placement est inférieur au taux de l'emprunt.

APPLICATION

M.KOKOBLIKO a contracté un emprunt de 10 000 000F aux conditions suivantes : taux annuel d'intérêt 12% ; remboursement intégral de l'emprunt à la fin de la 6^{e} année ; paiement annuel des intérêts échus. Calculer :

1) Le montant des intérêts payés chaque année

2)La somme constante à épargner chaque année au taux d'intérêt annuel de 8% en vue de constituer le fonds d'amortissement sachant que le premier versement a lieu un an après l'emprunt et le dernier à l'échéance

3) La charge annuelle effective de cet emprunt

SOLUTION

CHAPITRE 7 : LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

Il arrive qu'un Etat, une collectivité ou une société désire contracter un emprunt pour financer ses différentes activités, emprunt qui ne saurait être assuré par un seul prêteur compte tenu de son montant élevé. Un tel emprunt est donc fractionné équitablement afin de permettre à une multitude de prêteurs d'assurer son financement.

I. GENERALITES

1) Définitions

Un emprunt obligataire est un emprunt particulier contracté auprès d'une multitude de prêteurs appelés obligataires.
Les obligations sont des titres de créance négociables représentant chacun une fraction de l'emprunt.

2) Principes de remboursement

Le principe de remboursement est le même que celui des emprunts indivis à savoir l'équivalence des sommes reçues et celles décaissées en règlement de la dette.

3) Types de remboursement

Selon les clauses du contrat, le capital emprunté peut être remboursé de façon progressive ou en une seule fois.

4) Caractéristiques de l'emprunt

En fonction des objectifs fixés par l'emprunteur on définit les caractéristiques suivantes :

- **valeur nominale d'un titre** : c'est la valeur effective de l'obligation et qui est inscrite dans le contrat d'émission ; elle sert de base de calcul de l'intérêt. La valeur nominale est aussi appelée le pair.
- **taux nominal** : c'est le taux indiqué dans le contrat d'émission ; il peut être fixe ou variable.
- **coupon d'intérêt** : c'est l'intérêt périodique perçu sur chaque obligation non amortie ; il est égal au produit de la valeur nominale par le taux nominal.
- **prix d'émission** : c'est le prix de souscription payé par l'obligation pour être propriétaire de l'obligation. Par rapport à la valeur nominale, il peut être inférieur (émission en dessous du pair), égal (émission au pair) ou supérieur (émission au-dessus du pair).
- **valeur de remboursement** : c'est le prix auquel sera remboursée une obligation à son échéance. Il peut être fixe ou variable, égal à la valeur nominale (remboursement au pair) ou supérieur à cette valeur nominale (remboursement au-dessus du pair).
- **prime de remboursement** : c'est la différence entre la valeur de remboursement et le prix d'émission.
- **taux réel** : c'est le taux de celui à utiliser lorsque la valeur de remboursement est différente de la valeur nominale.

Soient V la valeur nominale ; i le montant de l'intérêt périodique pour 1F ; c le coupon d'intérêt $(\mathbf{c}= \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{i})$; E le prix d'émission ; R la valeur constante de remboursement d'une obligation ; N_0 le nombre d'obligations amorties à la fin de la période k ; m_k le montant de l'amortissement versé à la fin de la période k avec $\boldsymbol{m_k = A_k \times R}$; N_k le nombre d'obligations encore en vie après l'amortissement de la période k ; a_k l'annuité de la période k ; r le taux réel avec $\mathbf{r}= \frac{\boldsymbol{V\times i}}{\boldsymbol{R}}$

II. REMBOURSEMENT PROGRESSIF DE L'EMPRUNT

Le remboursement progressif nécessite une matérialisation des obligations émises sous forme de titres numérotés. Ce procédé rend possible périodiquement le tirage au sort d'un certain nombre de titres qui doivent être portés à l'amortissement.

1- Etude d'un tableau d'amortissement concret

a) Exemple

Dans le cadre du financement de son programme d'investissement, une entreprise a émis un emprunt dont les caractéristiques sont les suivantes :nombre d'obligations émises 150 000 ;valeur nominale d'une obligation : 10 000 F ; taux nominal d'intérêt : 9% ;prix de remboursement 11 000F ;prix d'émission : 95% de la valeur nominale ;durée de remboursement : 5 ans ; nombre de titres respectivement amortis chaque fin d'année : 20 000 ; 25 000 ; 28 000 ; 35 000 ; 42 000 .Le tableau d'amortissement de cet emprunt est le suivant :

Périodes	Obligations vivantes en début de période	Intérêts de la période	Amortissement		Annuités réelles	Obligations vivantes en fin de période
			Nombre d'obligations	Valeurs		
1	150 000	135000000	20000	220000000	355000000	130000
2	130 000	117000000	25000	275000000	392000000	105000
3	105 000	94500000	28000	308000000	402500000	77000
4	77 000	69300000	35000	385000000	454300000	42000
5	42 000	37800000	42000	462000000	499800000	0
		453600000	150000	1650000000	2103000	

b) Lecture et analyse du tableau

Analysons une des lignes du tableau par exemple la ligne 2 :

- le nombre d'obligations au début de la 2eme période (130 000) correspond au nombre d'obligations à la fin de la 1ere période ;
- l'intérêt d'un montant de 117 000 000 F est le produit par c du nombre d'obligations en début de période ; c= 0,09 ×10 000 = 900
- l'amortissement d'une valeur de 275 000 000 F est le produit du nombre de titres amortis lors de la période A_2 =25 000 par la valeur de remboursement R = 11 000 ; l'annuité de 392 000 000 F représente la somme des intérêts et de l'amortissement de la période.

- Le nombre d'obligations vivantes à la fin de la deuxième année est la différence entre le nombre d'obligations vivantes en début de période et le nombre de titres amortis à la fin de la période.

2. Généralisation

Nous adopterons les notations définies dans le paragraphe I-4

1) Tableau général

Période	Obligations vivantes en début de période	Intérêt de la période	Amortissement		Annuités réelles	Obligations vivantes en fin de période
			Nombre de titres	Montant (R connu)		
1	N_0	$N_0 c$	A_1	$A_1 R$	$N_0 c + A_1 R = a_1$	$N_0 - A_1 = N_1$
2	N_1	$N_1 c$	A_2	$A_2 R$	$N_1 c + A_2 R = a_2$	$N_1 - A_2 = N_2$
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
k	N_{k-1}	$N_{k-1} c$	A_k	$A_k R$	$N_{k-1} c + A_k R = a_k$	$N_{k-1} - A_k = N_k$
K+1	N_k	$N_k c$	A_{k+1}	$A_{k+1} R$	$N_k c + A_{k+1} R = a_{k+1}$	$N_k - A_{k+1} = N_{k+1}$
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
n-1	N_{n-2}	$N_{n-2} c$	A_{n-1}	$A_{n-1} R$	$N_{n-1} c + A_{n-1} R = a_{n-1}$	$N_{n-2} - A_{n-1} = N_{n-1}$
n	N_{n-1}	$N_{n-1} c$	A_n	$A_n R$	$N_{n-1} c + A_n R = a_n$	$N_n = 0$
		$\sum I_k$	N	NR	$\sum a_k$	

2.2 Relations entre les différents éléments d'un emprunt obligation

De ce tableau général d'amortissement on vérifie les propriétés suivantes :

a) **Relation liant le nombre de titres émis et les titres amortis :**

$N_O = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n$ (Relation 1)

$N_n = N_{n-1} - A_n = 0$ soit $N_{n-1} = A_n$ (Relation 2)

b. Relation liant la dette payable et les annuités

- La dette à rembourser et sur laquelle est basé le tableau d'amortissement constitue la dette initiale D_O égale à $N_0.R$
- le taux de calcul permettant d'établir l'équivalence entre les différents éléments de l'emprunt est le taux réel r .Selon le principe de l'équivalence, on obtient :

$N_0 \times R = a_1(1+r)^{-1} + a_2(1+r)^{-2} + \ldots\ldots + a_K(1+r)^{-k} + \ldots\ldots + a_n(1+r)^{-n}$

$N_0 \times R = \sum a_k(1+r)^{-k}$ (Relation 3)

c) Relation liant annuités et amortissements

Du fait de la similitude existant entre les emprunts indivis et les emprunts obligataires il ressort :

$a_n = m_n(1+r) = A_n.R(1+r)$ (Relation 4)

$a_{K+1} - a_K = m_{K+1} - m_K(1+r)$ (Relation 5)

d) Evaluation de la dette vivante à la date K

- soit R_K le capital amorti après le paiement de l'annuité a_K ; on a :

$R_K = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_K = A_1R + A_2R + A_3R + \ldots\ldots + A_kR$

$R_K = (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_K) \times R$ (Relation 6)

La somme $A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_K$ représente le nombre total de titres amortis après K paiements.

- soit D_K la dette vivante à la date K ; on a :

$D_k = D_0 - D_K = N_0 \times R - \sum A_k \times R = (N_0 - \sum A_k) \times R = N_k \times R$ avec

$N_K = N_0 - \sum A_k$ (Relation 7)

Cette dette peut être obtenue par actualisation des annuités non échues ; soit

$D = a_{K+1}(1+r)^{-1} + a_{k+2}(1+r)^{-2} + \ldots\ldots + a_n(1+r)^{-(n-k)}$ (Relation 8)

3- Cas particuliers

3-1 Emprunts obligataires remboursables par annuités constantes

Selon cette hypothèse les relations précédentes deviennent :

Relation 3 : $N_0R = a\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ (Relation 3 bis)

Relation 4 : $a = A_n \times R(1+r)$ (Relation 4 bis)

Relation 8 : $N_k \times R = a\frac{1-(1+r)^{-n+k}}{r}$ (Relation 8 bis)

Relation 5 : $m_{k+1} - m_k(1+r) = 0$ (Relation 5 bis)

De cette dernière relation on déduit :

$$m_{k+1} = m_k(1+r) \;\; soit\ encore \;\; A_{k+1}R = A_k R(1+r)$$

$$A_{k+1} = A_k(1+r)$$

Théorème

Lorsque les annuités sont constantes, les nombres successifs d'obligations amorties varient en progression géométrique croissante de raison (1+r).

Conséquences :

Relation1 : $N_0 = A_1 \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ (Relation 1 bis)

Relation 7 : $N_k = N_0 - A_1 \frac{(1+r)^k - 1}{r}$ (Relation 7 bis)

De la relation 1 bis, on tire $A_1\ puis\ on\ N_k = N_0 \frac{(1+r)^n - (1+r)^k}{(1+r)^n - 1}$ (Relation 9)

$N_{\square} = A_1 \frac{(1+r)^n - (1+r)^k}{r}$ (Relation 10)

La relation 8 devient donc : $N_k R = a \frac{1-(1+r)^{-n+k}}{r}$ (Relation 8 bis)

Remarque

En pratique les annuités sont plutôt sensiblement constantes compte tenu du fait que le nombre d'obligations amorties à chaque échéance est entier.

APPLICATION

Une société émet un emprunt obligation dont les caractéristiques sont les suivantes : nominal 10 000F ; prix d'émission 9 500F ; valeur de remboursement 12 500F ; nombre d'obligations émises 50 000F ; taux de souscription 7,5% ; remboursement progressif sur 5 ans par annuités constantes. Calculer :

1) Le montant de la dette à rembourser

2) Le montant de l'annuité constante

3) Le nombre de titres amortis au premier tirage

4) De deux façons différentes le nombre de titres en vie après le 3^e tirage

5) Ecrire les lignes 1,4 et 5 du tableau d'amortissement

SOLUTION

3-2) Emprunts obligataires remboursables par amortissements constants

Relation 1 : $N_0 = A + A + A + \cdots + A = n \times A$

$avec\ A\ le\ nombre\ constantd'obligations$ tirées à chaque échéance.

A= $\frac{N_0}{n}$

Relation 5 : $a_{k+1} - a_k = -A \times R \times r$ soit $a_{k+1} = a_k + (-\frac{N_0}{n} R \times r)$

Théorème

Lorsque les amortissements sont constants, les annuités varient en progression arithmétique de raison (-$\frac{N_0}{n} R \times r$)

APPLICATION

En tenant compte des données de l'illustration précédente, considérer un remboursement progressif sur 5 ans par amortissements constants puis calculer les 1e,4e et 5e lignes du tableau d'amortissement.

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

III.REMBOURSEMENT EN BLOC OU IN FINE

Principe

A l'émission, le débours (ou somme déboursée) des obligations s'élève à $N_0 \times E$; l'émetteur verse en contre partie à l'ensemble des obligations $N_0 \times c$ à chaque échéance et $N_0 \times c + N_0 \times R$ à $terme$. Dans des cas très rares, l'emprunteur verse à échéance les intérêts composés des coupons et la dette initiale $N_0 \times R$.

APPLICATION : Emprunt obligataire, 6,5%

Dans le cadre de son programme économique et financier 2010-2013, l'Etat de Côte d'Ivoire sollicite le marché financier de l'UEMOA à travers l'émission d'un emprunt obligataire dont les caractéristiques sont les suivantes : montant de l'emprunt 40 000 000 000, valeur nominale 10 000FCFA par obligation, durée totale 3 ans, taux d'intérêt 6,5% net d'impôts, remboursement in fine en 2013.

1) Calculer le nombre d'obligations émises

2) Calculer le montant des intérêts versés chaque année

SOLUTION

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

IV. CALCUL DES TAUX EFFECTIFS

Le taux nominal d'intérêt est un taux indicatif servant à calculer le coupon. Les taux effectifs désignent le taux réel r appelé taux actuariel, taux de rendement ou taux de revient.

1) Taux de rendement

1-1) Taux de rendement d'un obligataire

a)Cas d'une obligation remboursée à la date k

C'est le taux qui réalise l'équivalence entre la valeur d'émission de l'obligation et les sommes reçues par l'obligataire jusqu'à la date k. Soit x ce taux :

$$E= c(1+x)^{-1} + c(1+x)^{-2} + c(1+x)^{-3} + \cdots + c(1+x)^{-k} = c\,\frac{1-(1+x)^{-k}}{x} + R(1+x)^{-k}$$

Ce taux est au moins égal au taux nominal. Au delà de k = 2 la détermination du taux pourra se faire par essais successifs suivis éventuellement d'une interpolation linéaire.

APPLICATION

Une collectivité locale émet un emprunt-obligation remboursable à l'aide d'annuités sensiblement constantes. Les caractéristiques de cet emprunt sont les suivants : valeur nominale 10 000F ; taux d'intérêt nominal 12% ; prix d'émission 9 600F ; valeur de remboursement 10 800F ; nombre d'obligations émises 10 000 ; durée de remboursement 5 ans ; frais d'émission 2 400 000F. Calculer le taux de rendement réalisé par un obligataire dont les titres sont remboursés au 2^{e} tirage.

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

APPLICATION

En se basant sur les données de l'illustration 4, calculer le taux de rendement d'un obligataire, détenteur de 3 obligations remboursées de la façon suivante : une obligation remboursée au 2^e^ tirage et les deux autres remboursées au 3^e^ tirage.

SOLUTION

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

2) Taux de revient de l'émetteur

L'émission d'un emprunt obligation engendre des frais supportés par l'émetteur ; il dispose en définitive de la différence entre les sommes collecté es et les charges supportées. On note F le montant total des charges ; on appelle taux de revient de l'émetteur le taux t qui réalise l'équivalence entre le montant net disponible et les annuités de remboursement :

$N_0E - F = a_1(1+t)^{-1} + a_2(1+t)^{-2} + a_3(1+t)^{-3} + \cdots + a_n(1+t)^{-n}$

-si les annuités sont constantes, la relation devient $N_0E - F = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

-si le remboursement est in fine $N_0E - F = N_0c\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} + N_0R(1+t)^{-n}$

E$-f = c\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} + R(1+t)^{-n}\ avec\ f = \frac{F}{N_0}$

APPLICATION

En se basant sur l'illustration 4 déterminer le taux de revient de cet emprunt pour l'émetteur.

SOLUTION

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

CHAPITRE 8 : RENTABILITE DES INVESTISSEMENTS

La notion des cash-flows :

- Le délai de récupération.
- La valeur actuelle nette.
- Le taux de rendement interne.
- L'indice de profitabilité.

I. LE DELAI DE RECUPERATION (DR)

La durée de remboursement ou délai de récupération correspond à la période d'exploitation nécessaire pour récupérer le capital initial investi. C'est la période au terme de laquelle le cumul des flux de trésorerie générés par le projet couvre la dépense d'investissement.

Ce critère est basé sur l'idée que plus la récupération du capital engagé est rapide, plus le projet est intéressant.

$$\textbf{Délai de récupération} = \frac{\textbf{Dépense d'investissement en années}}{\textbf{Moyenne des cash-flow}}$$

$$DR = \frac{I_0}{Moy.CF}$$

Plus le délai de récupération est court, plus l'investissement est intéressant. Donc le critère de délai de récupération est bien adopté pour le choix d'un projet quand il est difficile de faire les prévisions à plus de 3 ou 4 ans.

En règle générale, il vaut mieux ne pas utiliser uniquement le critère de délai de récupération qui ne donne pas une mesure de la rentabilité des projets.

<u>Exemple 1</u> : ***2 projets d'investissement A et B :***

- **Projet A** : I_{0A} = 10 000
  Flux annuels différentiels = 3 100
  Durée de vie = 5ans
- **Projet B** : I_{0B} = 12 000
  Flux annuels différentiels = 2 000

Durée de vie = 10 ans

Les valeurs résiduelles des 2 projets sont nulles au terme de leur durée de vie.

Déterminer les délais de récupération correspondant à chaque projet.

<u>Exemple 2 :</u>

Soient 2 projets C et D dont les C.F. annuels inégaux figurent dans le tableau ci-dessous ;

La dépense d'investissement :

C= I_0= 10 000;

Durée de vie 6 ans ;

D= I_0= 12 000;

Durée de vie 10 ans.

Durée de vie	C.F.C	C.F.D
1	3 000	1 000
2	4 500	2 000
3	2 500	2 000
4	2 000	3 000
5	2 000	3 500
6	1 000	3 500
7		3 000
8		2 000
9		2 000
10		1 000

II. LA VALEUR ACTUELLE NETTE (VAN) :

Le critère de la V.A.N. consiste à rapprocher les cash-flows actualisés engendrés par le projet avec la dépense d'investissement également actualisée, le cas échéant.

Un investissement est acceptable si sa valeur actuelle nette est positive, c'est-à-dire s'il contribue à accroître la valeur actuelle totale de l'entreprise.

Pour calculer le critère de la VAN, il suffit de calculer la valeur actuelle des flux de liquidités futurs sécrétés par l'investissement puis de soustraire le montant de l'investissement initial.

Désignons par CF le flux de liquidités attendu de l'investissement pour la période t. Le montant de l'investissement initial est de I_0. Le taux d'actualisation considéré est de R1 pour un flux se produisant à la fin de la période t.

$$\text{VAN} = \left(\sum \quad CF\ x\ (1+t)^{-n}\right) - I_0$$ pour les CF variables

$$\text{VAN} = \frac{CF + \left[1-(1+t)^{-1}\right]}{t} - I_0$$ pour les CF constants

- **I_0** : Dépenses d'investissement.
- **CF** : Cash-flows annuel.
- **t** : Taux d'actualisation.
- **n** : La durée de vie.

La durée de vie de l'investissement étant de n périodes. L'investissement est accepté s'il permet d'accroître la valeur de l'entreprise, c'est-à-dire si la valeur actuelle des flux de liquidités est supérieure au coût de l'investissement **I_0.**

Exemple :

Considérons un investissement de
I_0 = 220 000.
Sa durée de vie est quatre (4) ans.
Les flux de liquidités attendus sont :
CF1 = 70 000, CF2 = 80 000, CF3 = 100 000 et CF4 = 110 000.
Ces flux se produisent respectivement à la fin de la période 1 et à la fin de la période 4.
Le taux d'actualisation est de 7 %.
Déterminons la VAN de cet investissement.

III. INDICE DE PROFITABILITE (IP) :

L'indice de profitabilité mesure la rentabilité des cash-flows actualisés par rapport à la dépense d'investissement réalisée.

$$IP= \sum_{i=1}^{n} \frac{CF\ x\ (1+t)^{-n}}{I_0} \quad , \quad IP= 1 + \frac{VAN}{I_0}$$

Il mesure l'avantage induit par un délai de récupération (DR) de capital investi.

Pour qu'un investissement soit acceptable, il faut que son indice de profitabilité (IP) soit supérieur à 1.

Plus l'indice est grand, plus l'investissement est important.

Exemple :

En s'appuyant sur les données de l'exemple précédant déterminer l'indice de profitabilité du projet.

IV. LE TAUX DE RENTABILITE INTERNE (TRI) :

Le taux rentabilité interne est le taux « r » qui rend la valeur actuelle des cash-flows égale à celle de la dépense d'investissement.

Le taux de rentabilité interne est déterminé par itération successif qui consiste à choisir un taux et à calculer la valeur actuelle nette (VAN). Si celle-ci est positive, on augmente le taux pris, et on calcule une autre VAN négative de façon à déterminer le TRI par interpolation qui est égale au taux pour lequel la VAN est nulle.

Application :

Un investissement « X » de 150 000 F dont la durée économique est de 4 ans, permet d'obtenir les cash-flows suivants :

- Année 1 : 40 000 F
- Année 2 : 70 000 F
- Année 3 : 80 000 F
- Année 4 : 60 000 F

Le taux d'actualisation est de 13%.

1) Déterminez et interpréter le délai de récupération de l'investissement X.
2) Calculez et interpréter la VAN de l'investissement X.
3) Calculez l'IP et interpréter de l'investissement X.
4) Le projet est-il acceptable à un taux de 25% ?
5) Détermine le TRI de l'investissement.

BIBLIOGRAPHIE

Olivier Levyne (2009), Mathématiques financières

WALDER Masieri, Mathématiques Financières – 2e Edition – Mai 2008,

SYSCOHADA

KOUAKOU Nouaman Albert & KONATE Issiaka Gestion Financière – 1ère Edition 2006 – 2007.