

المدرسة العليا للتكنولوجيا - أكادير
+ΞΙCΗ +οοKHHο+ | +ΞKISHΞIΞ+ - οXοΛΞO .
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE TECHNOLOGIE - AGADIR



Département : Techniques de Management

Filière : 1^{ère} année T.M & I.G.E

Semestre 2 :

Mathématiques financières

Support de cours

Année Universitaire: 2024/2025

4) Les annuités

Introduction

On appelle annuités une suite de flux monétaires perçus ou réglés à intervalles de temps égaux. Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.

Lorsque les annuités sont égales, on parle **d'annuités constantes**, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle **d'annuités variables**.

Remarques :

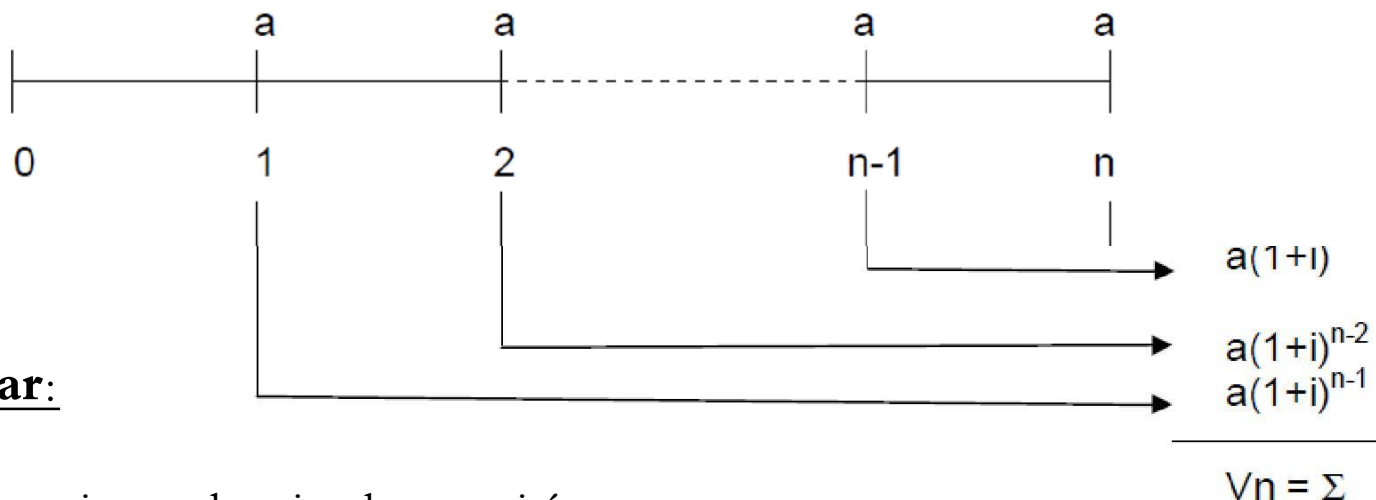
Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période.

Les annuités sont **certaines** si la période est constante, c'est-à-dire si le temps qui sépare deux versements est toujours le même et dans le cas contraire, la suite d'annuités est **aléatoire**.

4-1) Les annuités de fin de période

4-1-1) La valeur acquise (V_n):

On appelle valeur acquise (V_n) par une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.



Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme **1**, de raison géométrique **q = (1+i)** et comprenant **n** termes. La formule devient donc:

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

• **Exemple** : On place chaque année pendant 5 ans, un capital de 5 000 €. Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement, puis un an après le dernier versement (Capitalisation annuelle au taux de 6 %)

• **Solution** : $a = 5\,000$; $i = 0,06$; $n = 5$;

Valeur acquise au 5^e versement : $V_5 = 5\,000 \times \frac{1,06^5 - 1}{0,06} = 28\,185,46 \text{ €}$

Valeur un an après : $28\,185,46 \times 1,06 = 29\,876,27 \text{ €}$.

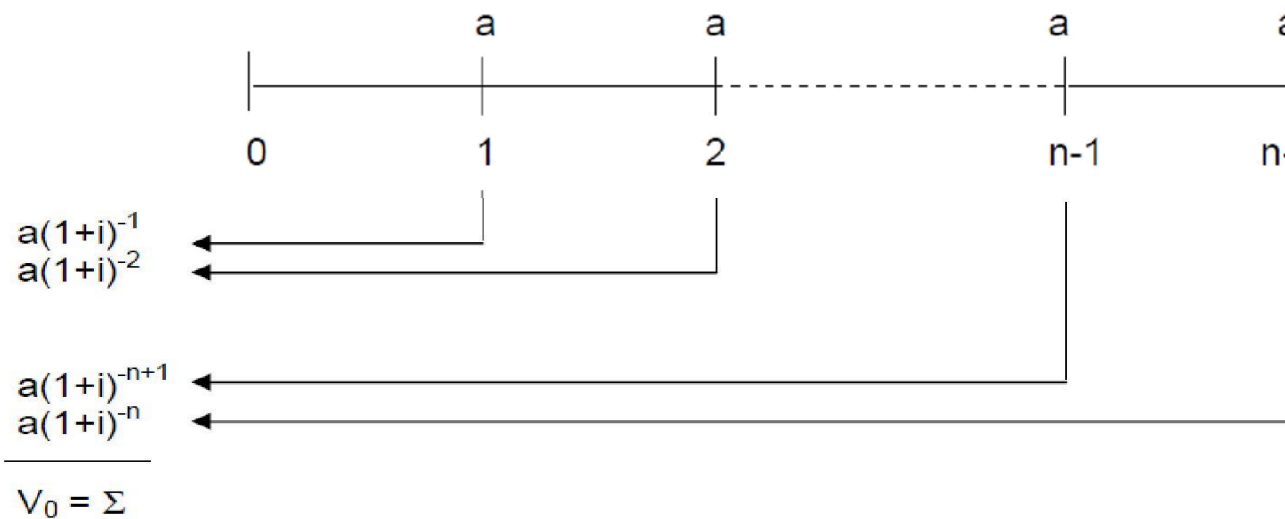
Intérêts acquis alors : $29\,876,27 - (5 \times 5\,000) = 4\,876,27 \text{ €}$

4-1-2) Valeur actuelle.

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées (V_0) exprimée à la date origine.

Remarque:

On rappelle que la valeur actuelle d'une somme A_k est la somme placée qui, après intérêt, produit A_k .



Si on note par:

V_0 = la valeur actuelle par la suite des annuités
 n = le nombre de périodes (d'annuités)
capitalisation

a = l'annuité constante de fin de période
 i = le taux d'intérêt par période de

Alors:

$$\begin{aligned}V_0 &= a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-n+1} + a(1+i)^{-n} \\V_0 &= a [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}] \\V_0 &= a (1+i)^{-1} [1 + (1+i)^{-1} + \dots + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1}]\end{aligned}$$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$V_0 = a (1+i)^{-1} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1+i-1}$$

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple

Quelle est la valeur actuelle au taux d'actualisation de 6% d'une suite d'annuité constante de 1500 euros versées à la fin de chaque année pendant 7 ans

Solution

La valeur actuelle de cette suite d'annuités constantes est donc :

$$VA = 1500 \times \frac{1 - 1,06^{-7}}{0,06}$$

$$VA \approx 8373,57$$

- **Exercice :** On verse chaque mois une somme de 1 000 € pendant 24 mois (taux d'actualisation : 0,5 % par mois).
Calculer la valeur actualisée de cette suite de versements un mois avant le premier versement.

- **Solution :**

$$a = 1\,000 ; i = 0,005 ; n = 24 ;$$

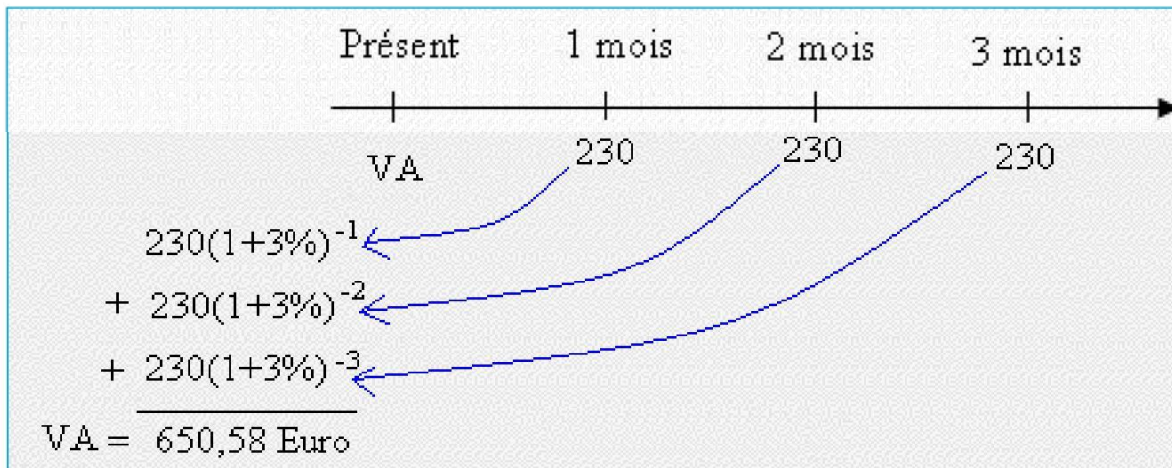
Valeur actuelle cherchée :

$$V_0 = 1\,000 \times \frac{1 - 1,005^{-24}}{0,005} = 22\,562,87 \text{ €}.$$

Exercice d'application 1.

Combien je dois prêter au taux mensuel de 3% pour me faire rembourser 230 Euros pour les trois mois suivants (remboursement en fin de période) ?

Il s'agit simplement de calculer la valeur actuelle de ces trois sommes d'argent à recevoir :



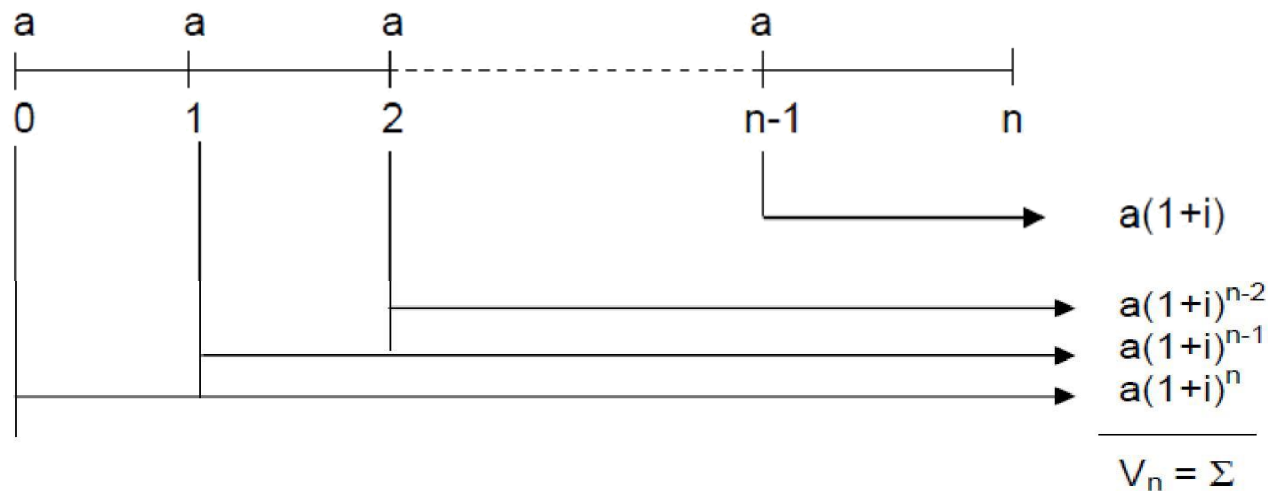
La valeur actuelle (VA) qui représente dans ce cas le montant à emprunter pour avoir trois remboursements mensuels de 230 Euro se calcule de la façon suivante :

$$VA = 230(1+3\%)^{-1} + 230(1+3\%)^{-2} + 230(1+3\%)^{-3} = 650,58 \text{ Euro}$$

4-2) Annuités constantes en début de période.

4-2-1) La valeur acquise :

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant:



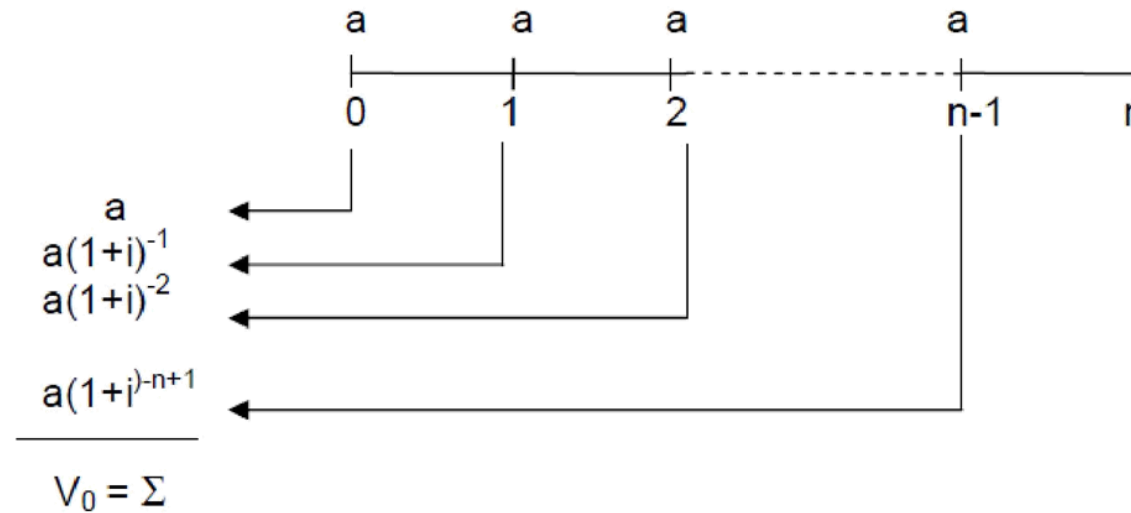
$$V_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$
$$V_n = a(1+i) [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+i)$ et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$V_n = a(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$\text{D'où : } V_n = a(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

4-2-2) La valeur actuelle.



$$V_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-n+1}$$

$$V_0 = a [1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n+1}]$$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

D'ou

$$V_0 = a (1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple 1 :

En déposant un montant d'argent le premier de chaque mois du 1^{er} janvier 2002 au 1^{er} janvier 2003, on désire accumuler 1000\$ au 1^{er} janvier 2003. Si le taux mensuel est de 0,005, quelle doit être la valeur du montant d'argent déposé chaque mois?

Solution

$$V_n = a(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A = \frac{1}{1.005} \frac{1000}{\frac{1.005^{13} - 1}{0.005}} = 74,27\$$$

Exemple 2 :

Quel montant doit-on verser le premier janvier de chaque année et pendant 8 ans pour rembourser un emprunt de 90 000 DH avec un taux de 7% ?

Application directe de la formule:

$$V_0 = a (1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = 14086 \text{ DH}$$

4-3) Les annuités variables

4-3-1) Les annuités quelconques de fin de période.

a) La valeur acquise.

Si on note par:

V_n = la valeur acquise par la suite des annuités. a_p
= l'annuité à la date p .

n = le nombre de périodes (d'annuités) i
= le taux d'intérêt.

Alors:
$$V_n = a_n + a_{n-1}(1+i) + \dots + a_2(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = \sum_{p=1}^n a_p (1+i)^{n-p}$$

b) La valeur actuelle.

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \dots + a_{n-1}(1+i)^{-n+1} + a_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \sum_{p=1}^n a_p (1+i)^{-p}$$

Exemple :

Quelle est la valeur actualisée et acquise d'une série de 7 placements annuels consécutifs en fin de périodes de resp. 1000 DH, 800 DH, 900DH, 1200DH, 1000DH, 700DH, 600DH, le taux d'intérêt étant de 8 % ?

3-4-2) Les annuités quelconques de début de période

a) La valeur acquise

$$V_n = a_n (1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + \dots + a_2 (1+i)^{n-1} + a_1 (1+i)^n$$

$$V_n = \sum_{p=1}^n a_p (1+i)^{n-p+1}$$

b) La valeur actuelle

$$V_0 = a_1 + a_2(1+i)^{-1} + \dots + a_{n-1}(1+i)^{-n+2} + a_n(1+i)^{-n+1}$$

$$V_0 = \sum_{p=1}^n a_p (1+i)^{-p+1}$$

Exemple :

Quelle est la valeur actualisée et acquise d'une série de 6 placements annuels consécutifs en début de périodes de resp. 1200 DH, 1000DH, 900DH, 1000DH, 1500DH, 1000DH. le taux d'intérêt est de 7 % ?

5) Emprunt indivis

5-1) Définition

On appelle emprunt indivis, un contrat d'emprunt entre un et un seul prêteur et un et un seul emprunteur.

Un tel emprunt fait l'objet d'un remboursement contractuellement fixe au moment de la signature du contrat (modalités d'amortissement).

Il est caractérisé par plusieurs éléments:

Le montant de l'emprunt C_0 . La
durée de l'emprunt T .

Le taux de l'emprunt i .

Les modalités de remboursement.

Remarque:

Les modalités de remboursement peuvent prendre 3 formes:

L'amortissement in fine ou emprunt remboursable en une seule fois.

Remboursement par amortissements constants.

Remboursement par annuités constantes.

5-2) Le tableau d'amortissement

Pour construire le tableau d'amortissement, il faut disposer des éléments suivants :

C_0 Le montant du capital emprunté appelé nominal et noté C_0 à la date $t = t_0$.

Le taux fixe d'intérêt noté i .

○ Le mode d'amortissement du capital. ○

La durée de l'emprunt notée T .

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \cdot i$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \cdot i$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \cdot i$	m_p	$a_p = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} \cdot i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} \cdot i$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Avec:

C_0 : capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt. I_p : intérêt de la $P^{\text{ème}}$ période.

m_p : amortissement de la $P^{\text{ème}}$ période.

a_p : annuité de la $P^{\text{ème}}$ période.

C_{p-1} : capital restant dû au début de la $P^{\text{ème}}$ période.

Remarques

Dans le tableau ci-dessus le terme annuité de remboursement peut être remplacé par les termes : semestrialité, mensualité ou trimestrialité.

L'annuité de remboursement comprend deux éléments :

Les intérêts payés sur la période écoulée notés **I_t** . Le capital amorti noté **m_t**

La formule de calcul :

$$a_t = i_t + m_t$$

Les intérêts payés a la fin de chaque période sont calculés en appliquant le taux nominal au capital restant dû en début de période.

La formule de calcul :

$$I_t = C_{t-1} * i$$

5-3) Propriétés d'un emprunt indivis

a) Le capital restant dû

Le capital restant dû après le paiement des **k** premières annuités est égal au capital initial diminué des k premiers amortissements.

La formule de calcul :

$$C_k = C_0 - \sum_{t=1}^k m_t$$

b) La somme des amortissements

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital

emprunté:

$$\sum_{p=1}^n m_p = C_0$$

Remarque:

Après le paiement du **n**ième amortissement **m_n** , le capital restant dû est égal à zéro donc la dette non remboursée avant le paiement de **m_n** est égale à **m_n** c'est à dire **$C_{n-1} = m_n$**

c) Le montant des intérêts payés

Le montant des intérêts payés après le versement des **k** premières annuités est égal au montant **I_k** tel que :

$$I_k = \sum_{t=1}^k I_t$$

d) Le cout total de l'emprunt

Le cout total de l'emprunt est égal à la somme de tout les intérêts versés.

$$I = \sum_{t=1}^n I_t$$

e) Le dernier amortissement et la dernière annuité

Le dernier amortissement et la dernière annuité sont liés entre eux par une relation :

$$a_n = m_n + (c_{n-1} * i) \quad \text{or} \quad c_{n-1} = m_n$$

$$a_n = m_n(1 + i)$$

5-4) Etudes des systèmes d'emprunt les plus utilisés.

5-4-1) L'amortissement in fine ou emprunt remboursable en une seule fois

5-4-1-1) Définition

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt. Les caractéristiques de cette emprunt sont:

Le capital emprunté C_0 est remboursé a la fin de la dernière période (en T).

Le capital restant dû en début de période étant le même (C_0) l'intérêt payé a chaque période est une constante.

Toutes les annuités sont constantes et égales au montant de l'intérêt sauf la dernière qui incorpore en plus l'intérêt de la dernière période, le montant du remboursement total du Capital emprunté (C_0).

5-4-1-2) Tableau d'amortissement

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_0.i$	---	$a_1 = I_1 = I$
2	C_0	$I_2 = I = C_0.i$	---	$a_2 = I_2 = I$
p	C_0	$I_p = I = C_0.i$	---	$a_p = I_p = I$
n-1	C_0	$I_{n-1} = I = C_0.i$	---	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	C_0	$I_n = I = C_0.i$	C_0	$a_n = I_n + C_0 = I + C_0$

Exemple :

$C_0 = 100\ 000$ euros

$i = 6\%$,

$n = 4$ ans

Périodes	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	annuités
1	100 000	6000	-	6000
2	100 000	6000	-	6000
3	100 000	6000	-	6000
4	100 000	6000	100 000	106 000

5-4-2) Remboursement par amortissements constants

5-4-2-1) Définition:

Il s'agit d'emprunt dont les remboursements se font par amortissements constants ou encore par série égale.

Les caractéristiques générales sont :

A la fin de chaque période on rembourse une part constante du capital emprunté. Cette part est égale au capital emprunté divisé par le nombre de périodes de remboursement.

Le capital restant dû et les intérêts à payer diminuent régulièrement.

Les annuités de remboursement sont la somme des **k** remboursements et les intérêts payés.

5-4-2-2) Tableau d'amortissement:

Si le capital emprunté est **C₀** et **T** le nombre de périodes, l'amortissement constant **m** est donné par la formule suivante :

$$m = \frac{C_0}{T}$$

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \cdot i$	m	$a_1 = I_1 + m$
2	$C_1 = C_0 - m$	$I_2 = C_1 \cdot i$	m	$a_2 = I_2 + m$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m$	$I_p = C_{p-1} \cdot i$	m	$a_p = I_p + m$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m$	$I_n = C_{n-1} \cdot i$	m	$a_n = I_n + m$

Exemple :

$C_0 = 100\ 000$ euros

$$m = \frac{C_0}{T}$$

$i = 6\%$

$n = 4$ ans

Périodes	Capital restant du	Intérêt	Amortissement	annuités
1	100 000	6 000	25 000	31 000
2	75 000	4 500	25 000	29 500
3	50 000	3 000	25 000	28 000
4	25 000	1 500	25 000	26 500

5-4-3) Remboursement par annuités constantes

5-4-3-1) Définition

Il s'agit d'un emprunt remboursé par annuités constantes dont les caractéristiques sont les suivantes :

L'annuité de remboursement de fin de chaque période composée des intérêts et d'une fraction du capital amorti est une constante.

Le capital remboursé à la fin de chaque période est égale a la différence entre l'annuité de remboursement et l'intérêt périodique.

L'intérêt périodique est obtenu par multiplication du capital restant dû et le taux d'intérêt. Le montant de l'intérêt périodique diminue au cours du temps.

L'annuité de remboursement est obtenue a partir de la relation donnant la valeur actuelle d'une suite de flux constants versés en fin de période pendant T périodes au taux i .

$$C_0 = a \left[\frac{1 - (1 + i)^{-T}}{i} \right] \Rightarrow \boxed{a = \frac{C_0 i}{1 - (1 + i)^{-T}}}$$

5-4-3-2) Tableau d'amortissement

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \cdot i$	m_1	$a = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \cdot i$	m_2	$a = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \cdot i$	m_p	$a = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} \cdot i$	m_{n-1}	$a = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} \cdot i$	m_n	$a = I_n + m_n$

Exemple :

$$Co = a \left[\frac{1 - (1+i)^{-T}}{i} \right] \Rightarrow a = \frac{Coi}{1 - (1+i)^{-T}}$$

$Co = 100\,000$ euros

$i = 6\%$

$a = 28859,15$ $n = 4$ ans

Périodes	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	annuités
1	100 000	6 000	22859.15	28859,15
2	77140.85	4628.451	24230.7	28859,15
3	52910.15	3174.6	25684.54	28859,15
4	27225,61	1633,53	27225,61	28859,14

Les amortissements forment
une suite géométrique
de raison $1+i$